発散のないmodelの試作(5)

著者	古尾谷 泉
出版者	法政大学多摩研究報告編集委員会
雑誌名	法政大学多摩研究報告
巻	18
ページ	9-24
発行年	2003-03-30
URL	http://hdl.handle.net/10114/1582

法政大学多摩研究報告　18：9～24, 2003

発散のないmodelの試作（V）

古尾谷　泉

An attempt toward a non divergent model (V)

Izumi FURUOYA

1. はじめに

物理学の質点系の基礎理論には、常に“発散の困難”といわれる欠陥が内在している。しかし、今だに、その解決策は見い出されていない。この欠陥は、“くりこみ”といわれる操作で対処されるが、これなども抜本的な解決策ではない。我々は発散のないmodelを作ることを試みてきた。この論文はその一連の仕事の第5編である。

我々のmodelでは、古典論的な意味で「電荷の値は相互作用によって変わることのない恒常的不変量である」という要請をおく。そして、相互作用を、この要請を満たすように、またVan Hoveのunitary equivalenceの問題に関連して、unitary変換内で、拡張する。このことにより、物理空間に新しい対称性が付与される。その結果、状態が縮退して、propagatorの積分の次元が縮小し一次元となり、発散はおきない。このようにして、我々のmodelでは“発散の困難”は回避される。

また、素粒子物理学における“hierarchyの問題”に関連して、我々のmodelにおけるenergy-momentum tensorを計算する。基本粒子の階層構造が直接説明できたわけではないが、このtensorは、場合によっては、周期性を示すことを示す。また、我々のmodelにおけるfundamental metric tensorは、Rachball達が、大統一scaleとweak scale間の喰い違いを正すために採用したmetricと、内部の構造は異なるが、同形であることを示す。

第2章、我々のmodelはどのような考えに基づいているのか、通常の理論との違いについて説明する。

第3章、Lagrangean形式で、scalar fieldのwave equationおよび、propagatorを再導出し、発散はおきないことを示す。

第4章、我々のmodelにおけるenergy-momentum tensorをLagrangear形式で導出する。

第５章、我々の model と hierarchy problem との関わりについてふれる。

2. 我々の model の物理的解釈

この章では、我々の理論が通常の理論とどのように違うのか、という点について説明しよう。

今、電荷が e_0 で質量が m_0 の裸の荷電粒子と電場との相互作用が switch on されたとしよう。電荷の値は、仮想的な粒子の対生成や対消滅がおきて、変更をうける。また、質量についても、仮想的な光子を放出後、吸収し、この“ゆらぎ”によって、その値は変更をうける。この量子効果による両者の値の変化を、それぞれ δe および δm とすれば、粒子の電荷と質量とは、それぞれ、$e=e_0+\delta e$ および、$m=m_0+\delta m$ となる。しかし、δe も δm も摂動論で計算すると無限大になってしまう。諸々の物理量、例えば、散乱断面積等の計算では、摂動後の無限大量 e と m とは実際の測定値でおきかえられる。この“くりこみ”の処方によって、理論値は実験値と比較可能となる。そして、このようにして“くりこまれた”後に得られた電荷の値の有限部分は space like な 4-momentum transfer に依存する。この“くりこみ”の処方によって、電磁量子力学（色量子力学も同様であるが）は内部に矛盾のない実験値を再現できる理論であると考えられている。

ここで、電荷 e で質量 m の荷電粒子を外場 E に引っぱる場合を想定しよう。摂動を無視した第０近似では

$$m_0\alpha=e_0E, \tag{2-1}$$

とかける。外場を含んだ相互作用を用いて、摂動計算で高次の補正まで考慮し、“くりこむ”所は“くりこんだ”後の電荷や質量の値は外場の強さに依存すると考えてよいであろう。

そのようなことがいえるとすれば、それらを E の関数として $e(E)$ および $m(E)$ とかけば、運動方程式は $e(E)$ と $m(E)$ とを含んだ複雑な式となろう。しかし、ここでは、議論をわかりやすくするために、運動方程式は象徴的に

$$m(E)\cdot\alpha=e(E)\cdot E, \tag{2-2}$$

とかくことにしよう。発散の問題は、ニュートン力学では雑然としていたが、理論を相対論的に共変な形にかくことによって、単に、電荷と質量との問題に帰着できることが示された。（他に、vertex の補正もあるが、ここでは直接関わりがないので考えない）。このように考えてくると、Eq.(2-2)には、何か本質的な問題解決の鍵が秘められているように思える。ここで、Eq.(2-2)を用いて、この系の物理的な単位を決定することを考えよう。Eq.(2-2)で、$E\cong 0$ 付近で、$\alpha=e(0)=E=1$ とすると、$m(0)=1$ であり、これを質量、すなわち、energy の単位に採る

ことが出来よう。次に、$E \gg 0$ の場合には、実際に観測にかかる方程式は $m(0)\cdot\alpha = e(0)\cdot E$ ではないので、$E \cong 0$ で決めた単位は、もはや、使用できないであろう。$E \gg 0$ の場合には、新に、新しい単位を測定可能な $m(E)\cdot\alpha = e(E)\cdot E$ で決め直さなければならないのではないか。とすると、これら2つの系は互に関連のない、それぞれ独立した系になってしまうであろう。いいかえると、E の値の違いによって、互に、ばらばらで、全く無関係な独立した系が無数に存在することになろう。このような独立した系の間には、当然のこととして、互に関係づける unitary 変換は存在しないであろう。これは、Van Hove のいう「固有値問題を解くに用いる空間は Hamiltonian ごとに、すなわち、相互作用の強さの違いによって異なっていて、それらを結びつける unitary 変換は存在しない」という定理の物理的な解釈と考えられはしまいか。系の単位が、全体を通して、決定出来るためには、運動方程式は、外場の強さ E によらない不変な式でなければなるまい。そのためには、これらのばらばらな物理空間が共有する不変量の存在が不可欠であると考えられる。我々の model では、そのような量が電荷なのである。すなわち、我々の model では「電荷の値はどのよう系から眺めても一定である」という要請をおく。このことの意味を例をあげて説明しよう。ニュートン力学では、時空は apriori に備わっており、このような絶対的な時空構造では、信号は瞬時に伝わらなければならないから、光の速さは無限大となる。一方、相対論では、時空構造は「どのような慣性系から測っても光速は一定な不変量である」という条件をみたすように決められる。上の例は比喩的ではあるが、要は、尺度は相対的なのである、ということをいっているのである。我々の model は、電荷に関して、このように相対論的立場から眺めた理論なのである。我々の理論は、古典的な意味で、電荷の値が相互作用によって変わらないような単位系、すなわち、metric の上に成り立った理論なのである。ここで、古典的とは、仮想的な粒子の対生成・対消滅や、仮想的な光子の放出・吸収といったような量子効果による dynamics は考えないという意味である(注)。

注） $\varphi_\mu(x)$ は外場、また、a_μ を副射場とすると、これらは Maxwell 方程式の解である。a_μ は operator であるが、$\varphi_\mu(x)$ は c-number である。φ_μ を含んだ相互作用は

$$H(\tau) = \int j^\mu(x)(a_\mu + \varphi_\mu)\,d\sigma$$

であたえられる。S-matrix の n-次の iteration 解は φ_μ の n 次の polynomial である。すなわち、

$$S^{(n)} = \frac{n}{z} S^{(n\nu)}$$

ここで

$$S^{(n\nu)} = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2\cdots d\tau_1 \times P(H(\tau_n)\cdots H(\tau_1)),\ (n \geq 1)$$

である。ここで、$P(\cdots)$ は ν 個の $\varphi_\mu(x)$ のみを含んだ $H(\tau_i)$ と $n-\nu$ 個の $a_\mu(x)$ のみを含んだ $H(\tau_i)$ との積となる。このことから、実際には、現理論で外場の効果と量子効果とを分離するのは不可能であろう。

通常の理論では、相互作用は相対論の要請をみたすように、すなわち、Lorentz 変換の tensor となるような形に作られる。例えば、λ を相対論的添字として、電流は $\overline{\Psi}\gamma_\lambda\Psi$ 、電場を A_λ とすると、相互作用は $\overline{\Psi}\gamma_\lambda\Psi\cdot A^\lambda$ といった風に。そして、この相互作用の妥当性は、このようにして作られた相互作用を用いて、諸々の物理量を計算し、それらが実験値とあうかどうかできめられる。また、相互作用は、Poincaré 変換、すなわち、Lorentz 変換＋並進、のうちの並進に対応している。これらのことをふまえて、我々の model では、相互作用を、「電荷不変の要請」を満たし、また、Van Hove の定理にさしさわりのないように、Lorentz 変換を含むより広い unitary 変換内での並進に対応した形に拡張する。

今、G_0 は Lorentz 変換とし、G は G_0 を含むより広い unitary 変換とする。我々の model における相互作用 G' は

$$G' = G/G_0 \tag{2-3}$$

で定義しよう。したがって、相互作用の効果は

$$G'; G \to G'G \tag{2-4}$$

となろう。この作用によって、電荷の値は不変となる。事実、自由粒子の電荷を ρ、これが相互作用によって ρ' になったとすると、

$$\rho' = e\int\Psi^*(G'x)\Psi(G'x)\,dx = e\int\Psi^*(x)\Psi(x)\,dx = \rho, \tag{2-5}$$

となり、ρ は相互作用によって変わらないのである。我々の model の相互作用の作り方の具体例については前論文を参照のこと。

物理学における仮説は、一般には、その背後にある関連した実験事実に基づいている。偉大な先人たちの例を教科書として仰ぐならば、例えば、プランクの仮説は、黒体放射の現象論的な経験式を説明するために導入された。また、相対論における「光速不変」の公理は、マイケルソン・モーレーの光の実験に基づいている。しかし、不遜だがいわせてもらえれば、我々の「電荷不変」の要請には、そのような実験事実は存在しない。また、Eq.(2-2)が成り立つ保証はなにもないのである。だから、ここで述べたことは、我々の理論が成立するとすれば、通常の理論とどのような点が異なるのかということの、説明なのである。

3. 発散の消失

この章では、我々の model における scalar field の wave equation および propagator を再導出する。そして、我々の model では、物理空間が縮退していて、propagator の積分の次元が一次元となり、発散はおきないことを示す。

簡単のために、時空座標は3次元とし、z_0 を時間座標、z_1 および z_2 は空間座標とする。我々

の model での fundamental metric tensor は

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 e^{-\frac{2z_0}{a}} & 0 \\ 0 & 0 & a^2 e^{-\frac{2z_0}{a}} c_1^2 \end{bmatrix}, \tag{3-1}$$

および

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} e^{\frac{2z_0}{a}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2} e^{\frac{2z_0}{a}} \frac{1}{c_1^2} \end{bmatrix}, \tag{3-2}$$

である(注)。

自由粒子の scalar field を ϕ とし、Lagrangean を

$$L = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \phi)(\partial_\beta \phi) - \mu^2 \phi^2), \tag{3-3}$$

とおく。ここで、 $g^{\alpha\beta}$ を Lorentz metric $\eta^{\lambda\mu}$ でおきかえれば、通常の理論における Lagrangean となる。μ は自由粒子の質量であるが、この章における議論では、あまり本質的な意味をもたないので、あってもなくてもよかろう。

この系での action は

$$S = \int L \sqrt{\|g\|}\, dz,$$
$$dz = dz_0 dz_1 dz_2, \tag{3-4}$$

とおく。$\sqrt{\|g\|}$ は体積密度であり、具体的には

$$\sqrt{\|g\|} = a^2 e^{-\frac{2z_0}{a}} c_1, \tag{3-5}$$

であたえられる。最小作用の原理

$$\delta S = 0 \tag{3-6}$$

から、wave equation は、$\phi_{,\lambda} = \partial_\lambda \phi$ として

$$\partial_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \phi_{,\lambda}} \left(\sqrt{\|g\|}\, \phi^{,\lambda} \right) \right) - \sqrt{\|g\|}\, \phi = 0, \tag{3-7}$$

をうるが、これは、また

注）発散の問題は propagator の積分の次元の問題であるので、metric が indefite であるかどうか、は本質的でない。

$$\frac{1}{\sqrt{\|g\|}}\partial_0\sqrt{\|g\|}=(-)\frac{2}{a},\quad \frac{1}{\sqrt{\|g\|}}\partial_1\sqrt{\|g\|}=(-)\frac{s_1}{c_1}\quad \text{および}\quad \frac{1}{\sqrt{\|g\|}}=\partial_2\sqrt{\|g\|}=0, \tag{3-8}$$

を用いると

$$\left\{\left(\partial_0^2-\frac{2}{a}\partial_0\right)+\frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2}\left(\partial_1^2-\frac{s_1}{c_1}\partial_1\right)+\frac{1}{c_1^2}\partial_2^2\right\}\Phi(012)=0, \tag{3-9}$$

となる。Eq.(3-9)は論文(Ⅲ)で導出したEq.(4-10)と同じ式である。

このようにして、我々の model における wave equation の一般形は、相互作用を、簡単のために、(1,2) 成分のみに依存するとして、$V(12)$ とすれば

$$\Lambda\Phi(012)=0,$$

ここで

$$\Lambda\equiv\Lambda_0+\frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2}\left(\Lambda_1+\frac{1}{c_1^2}+\Lambda_2+V\right), \tag{3-10}$$

であり、 Λ_0, Λ_1,および Λ_2 は、

$$\Lambda_0\equiv\partial_0^2-\frac{2}{a}\partial_0,$$

$$\Lambda_1\equiv\partial_1^2-\frac{s_1}{c_1}\partial_1,$$

および

$$\Lambda_2\equiv\partial_2^2, \tag{3-11}$$

である。

$V(12)\equiv 0$ ならば、$\Phi(012)$ は自由場であり

$$\Phi(012)\equiv\phi_\lambda(0)\phi_\mu(1)\phi_\nu(2), \tag{3-12}$$

とかける。ここで、$\phi_\lambda(0)$, $\phi_\mu(1)$ および $\phi_\nu(2)$ は、それぞれ

$$(\Lambda_0-\lambda)\phi_\lambda(0)=0,$$

$$\left(\Lambda_1+\mu-\frac{\nu}{c_1^2}\right)\phi_\mu(1)=0,$$

および

$$(\Lambda_2+\nu)\phi_\nu(2)=0, \tag{3-13}$$

の解であり、これらは直交関係

$$\int\phi^*_\lambda(0)\phi'_\lambda(0)\sqrt{\|g\|}\,dz_0=\delta'_{\lambda\lambda}\quad \text{および}\quad \sum_\lambda\phi_\lambda(0)\phi_\lambda\overline{(0)}\sqrt{\|g\|}=\delta(0-\bar{0}),$$

$$\int\phi^*_\mu(1)\phi'_\mu(1)\sqrt{\|g_{11}\|}\,dz_1=\delta'_{\mu\mu}\quad \text{および}\quad \sum_\mu\phi_\mu(1)\phi_\mu\overline{(1)}\sqrt{\|g_{11}\|}=\delta(1-\bar{1}),$$

および　$\int \phi^*_{\nu}(2)\,\phi_{\nu'}(2)\sqrt{\|g_2\|}\,dz_2 = \delta_{\nu\nu'}$　および　$\sum_{\nu}\phi_{\nu}(2)\,\phi_{\nu}(\overline{2})\sqrt{\|g_2\|} = \delta(2-\overline{2})$,　(3-14)

をみたす。Eq.(3-12)を、$V(12)=0$ のときの Eq.(3-10)に代入し、左辺から $\phi^*_{\mu}(1)$ および $\phi^*_{\nu}(2)$ をかけ、直交関係 Eq.(3-14)を用いると

$$\left(\lambda - \mu\frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2}\right)\phi_{\lambda}(0) = 0, \tag{3-15}$$

をうる。更に、Eq.(3-15)の左辺から、$\phi^*_{\lambda'}(0)\sqrt{\|g_0\|}$ をかけ、z_0 で積分すれば

$$\lambda\delta_{\lambda\lambda'} - \mu\left\langle \lambda' \left| \frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2} \right| \lambda \right\rangle = 0 \tag{3-16}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} &\lambda' \fallingdotseq \lambda \text{ のとき} \qquad \left\langle \lambda' \left| \frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2} \right| \lambda \right\rangle = 0, \\ &\lambda' = \lambda \text{ のとき} \qquad \lambda - \mu\left\langle \lambda \left| \frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2} \right| \lambda \right\rangle = 0, \end{aligned} \tag{3-17}$$

をうる。

次に、Eq.(3-10)の解を、V は小さいとして、摂動で求めよう。そのために、$\Phi(012)$ を、$\Phi_{\lambda}(0)\Phi_{\mu}(1)\Phi_{\nu}(2)$ で展開する。

$$\Phi(012) = \sum_{\lambda\mu\nu} a_{\lambda\mu\nu}\,\Phi_{\lambda}(0)\,\Phi_{\mu}(1)\,\Phi_{\nu}(2), \tag{3-18}$$

これを、Eq.(3-10)に代入し、Eq.(3-14)の直交関係を用いると、展開係数 $a_{\lambda\mu\nu}$ は

$$a_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{\lambda - \mu\left\langle \lambda \left| \frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2} \right| \lambda \right\rangle} \times \iiint \phi^*_{\lambda}(\overline{0})\,\phi^*_{\mu}(\overline{1})\,\phi^*_{\nu}(\overline{2})(-)\frac{1}{a^2}e^{\frac{2z_0}{a}}V(\overline{12})\,\Phi(\overline{012})\sqrt{\|g\|}\,d\overline{z_0}\,d\overline{z_1}\,d\overline{z_2}, \tag{3-19}$$

となる。これより

$$\Phi(012) = \phi_{\lambda^0}(0)\,\phi_{\mu^0}(1)\,\phi_{\nu^0}(2)$$

$$+\iiint\sum_{\lambda\mu\nu}\phi_\lambda(0)\,\phi_\mu(1)\,\phi_\nu(2)\frac{1}{\lambda-\mu\left\langle\lambda\left|\frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2}\right|\lambda\right\rangle}\phi^*_\lambda(\bar{0})\,\phi^*_\mu(\bar{1})\,\phi^*_\nu(\bar{2})$$

$$\times(-)\frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2}V(\bar{1}\bar{2})\quad\Phi(\bar{0}\bar{1}\bar{2})\sqrt{\|\bar{g}\|}\cdot d\bar{z}_0\,d\bar{z}_1\,d\bar{z}_2 \tag{3-20}$$

となる。したがって、propagator は

$$G(012:\bar{0}\bar{1}\bar{2})\equiv\sum_{\lambda\mu\nu}\phi_\lambda(0)\,\phi_\mu(1)\,\phi_\nu(2)\frac{1}{\lambda-\mu\left\langle\lambda\left|\frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2}\right|\lambda\right\rangle}-\phi^*_\lambda(\bar{0})\,\phi^*_\lambda(\bar{1})\,\phi^*_\lambda(\bar{2}), \tag{3-21}$$

となるが、直交関係 Eq.(3-14)より、ほぼ

$$\sum_\lambda\phi^*_\lambda(0)\,\phi_\lambda(\bar{0})\sqrt{\|g_0\|}\sim 1$$
$$\sum_\mu\phi_\mu(1)\,\phi^*_\mu(\bar{1})\sqrt{\|g_1\|}\sim 1$$

および、

$$\sum_\nu\phi_\nu(2)\,\phi^*_\nu(\bar{2})\sqrt{\|g_2\|}\sim 1, \tag{3-22}$$

であるから、本質的には発散の問題は

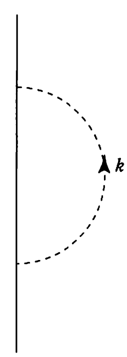
$$\sum_\lambda\frac{1}{\lambda-\mu\left\langle\lambda\left|\frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2}\right|\lambda\right\rangle}, \tag{3-23}$$

の収束の問題となる。

通常の理論で最も簡単な例として、無限に重い核子が、仮想的に中間子を出したり吸ったりしているときの核子の自己エネルギーは

$$\Delta E\sim g^2\int\frac{d^3k}{k^2+m^2}, \tag{3-24}$$

であたえられるが、これは一次の発散量である[注]。Eq.(3-23)はこの式に対応しているとみなしてよかろう。



注）マントル　場の量子論入門。

ここで、Appendix A より、

$$\lambda = p\left(p + \frac{i}{a}\right), \tag{3-25}$$

であるが、$a \to \infty$ のとき、$\lambda \to p^2$ であり、このとき、E を通常のエネルギーとすると、$p \to E$ となる。また、前にも注意したように、$\sum_{\lambda}$ は正しくは $\sum_{p}$ の意味であるから、Eq.(3-23)は

$$\int \frac{dp}{p^2} \sim \frac{1}{p}, \tag{3-26}$$

となり、この積分は、p の大きい所では、収束する。

ここで、注意すべきは、我々の model では、空間の対称性によって、μ と ν の状態が縮退しているために、積分が一次元に縮少してことである。このようにして、我々の model では、$p \sim E$ の大きいところでの発散、すなわち、紫外発散はおきないのである。

Eq.(3-23)における因子 $\left\langle \lambda \middle| e^{\frac{2z_0}{a}} \middle| \lambda \right\rangle$ の項は

$$\lambda \to \infty \text{ のとき、} \left\langle \lambda \middle| e^{\frac{2z_0}{a}} \middle| \lambda \right\rangle \to 0$$

および

$$\left\langle \lambda \middle| e^{-\frac{2z_0}{a}} \middle| \lambda \right\rangle \sim \frac{a}{2}, \tag{3-27}$$

となるが、これが積分の値にどうかかわってくるのかは検討の余地がある。

最後に、因みに、Eq.(3-20)を変形しておこう。Eq.(3-20)は、$E = \left\langle \lambda \middle| \frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2} \middle| \lambda \right\rangle$ とおけば

$$\Phi = \phi_0 + \frac{-E}{\lambda - E\mu}\Phi, \tag{3-28}$$

とかけるが、これから、左辺の Φ を右辺の Φ に逐次代入していけば、

$$\begin{aligned}
\Phi &= \phi_0 + \frac{-E}{\lambda - \mu E}\Phi \\
&= \left(1 + \frac{-E}{\lambda - \mu E}V + \frac{-E}{\lambda - \mu E}V\frac{-E}{\lambda - \mu E}V + \cdots\right)\phi_0 \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{EV}{\lambda - \mu E}}\phi_0 = \left(1 - \frac{EV}{\lambda - E(\mu - \overline{V})}\right)\phi_0
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\Phi = \left(1 - \frac{EV}{\lambda - E(\mu - \ddot{\nu})}\right)\phi_0 \tag{3-29}$$

とかける。

4. 保存量

相対論で、質量 μ の粒子の energy と momentum は

$$E^2 = c^2 p^2 + \mu^2 c^4, \tag{4-1}$$

の関係にあり、平面波

$$\varphi = e^{i(pr - Et)} \tag{4-2}$$

は方程式

$$\Box\varphi = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi = (\mu c)^2\varphi, \tag{4-3}$$

の解である。Eq.(4-3)であたえられる場 φ の energy は

$$E = \frac{1}{2}\int_V \left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + (\mu c)^2\varphi^2\right\} dr, \tag{4-4}$$

とおくことが出来る。この E は保存則をみたさなければならない。すなわち、 E の時間的変化は空間の表面を通して入ってくる energy の流れに等しいという関係がなければならない。事実、Eをtで微分して、運動方程式、Eq.(4-3)を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= \int_V \left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + (\mu c)^2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} dr \\ &= \int_V \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - (\mu c)^2\varphi\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + (\mu c)^2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} dr \\ &= \int_V \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right\} dr \\ &= \int_S \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_n dS,\end{aligned} \tag{4-5}$$

となる。したがって、$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$は表面を通して流れるenergyと解釈できる。energyの流れをc^2で割れば質量の流れ、すなわち、momentumが得られる。したがって、Eq.(4-2)の場に対して、energyとmomentumを

$$E=\frac{1}{2}\int_V\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+(\mu c)^2\varphi^2\right\}dr$$

および

$$P=-\frac{1}{c^2}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)dr \tag{4-6}$$

と定義すれば、これらが系に含まれる自由粒子のenergy-momentumの総量である。これらは連続の方程式、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+divP=0, \tag{4-7}$$

をみたす。

次に、我々のmodelで、このenergy-momentum保存則を拡張することを考えよう。

Lagrangean形式で対称的なenergy-momentum tensorを直接うるには、metric tensorによる変分を用いるとよい。我々のmodelにおけるenergy-momentum tensorを$T_{\alpha\beta}$とすると、metric tensor $g^{\alpha\beta}$による変分により

$$T_{\alpha\beta}=\frac{(-)2}{\sqrt{\|g\|}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^\rho}\left(\frac{\partial\left(L\sqrt{\|g\|}\right)}{\partial\left(\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial z^\rho}\right)}\right)-\frac{\partial(L\sqrt{\|g\|})}{\partial g^{\alpha\beta}}\right\}, \tag{4-8}$$

をうる。自由粒子のscalar field ϕに対するLagrangeanはEq.(3-3)、すなわち、

$$L=\frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}(V_\alpha\phi)(V_\beta\phi)-\mu^2\phi^2\right), \tag{3-3}$$

であるから、これを用いて、

$$\begin{aligned}T_{\alpha\beta}&=\frac{(-)2}{\sqrt{\|g\|}}\quad\frac{\partial\left(L\sqrt{\|g\|}\right)}{\partial g^{\alpha\beta}}\\&=(-)2\left\{\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}}+\frac{1}{2}L\frac{1}{\|g\|}\frac{\partial\|g\|}{\partial g^{\alpha\beta}}\right\}\end{aligned} \tag{4-9}$$

となる。ここで

$$\|g_{\alpha\beta}\|\cdot\|g^{\rho\sigma}\|=\|\delta_\alpha^\rho\|, \tag{4-10}$$

より

$$\frac{\partial\|g\|}{\partial g_{\alpha\beta}}=(-)\|g_{\rho\delta}\|\cdot\frac{\partial\|g^{\kappa\varepsilon}\|}{\partial g^{\alpha\beta}}\cdot\|g_{\xi\mu}\|, \tag{4-11}$$

であるから

$$T_{\alpha\beta}=(-)2\left\{\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}}-\frac{L}{2}g_{\alpha\beta}\right\}, \tag{4-12}$$

とかける。ここで、Eq.(3-3)の L を用いると

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T_\alpha^\beta=(-)\Big\{&\Big(\big(\nabla_\beta\nabla^\beta+\mu^2\big)\phi\Big)\big(\nabla_\alpha\phi\big)\\&+\big(\nabla^\beta\phi\big)\big(\nabla_\beta\nabla_\alpha\phi\big)-\big(\nabla_\rho\phi\big)(\nabla^\rho\nabla_\alpha\phi)\Big\},\end{aligned} \tag{4-13}$$

となるが、wave equation

$$\big(\nabla^\beta\nabla_\beta+\mu^2\big)\phi=0, \tag{4-14}$$

を用いると

$$\nabla_\beta T_\alpha^\beta=0, \tag{4-15}$$

をうる。これが我々の model に拡張された Eq.(4-7)に対応する energy-momentum 保存あらわす式である。ここで、T_0^0の具体的な形を求めよう。

(A) Minkowski metric

$$\eta^{\lambda\mu}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \tag{4-10}$$

に対しては

$$T_0^0=(\partial_0\phi)^2+(\partial_1\phi)^2+(\partial_2\phi)^2-\mu^2\phi^2 \tag{4-11}$$

である。これは Eq.(4-4)と同じである。

(B) 我々の model space では、Eq.(3-1) および Eq.(3-2) であたえられる metric に対して

$$T_0^0=(-)(\partial_0\phi)^2+\frac{e^{\frac{2z_0}{a}}}{a^2}\left((\partial_1\phi)^2+\frac{1}{c_1^2}(\partial_2\phi)^2\right)-\mu^2\phi^2, \tag{4-18}$$

となる。

Eq.(4-15) の $\alpha=0$ 成分のみを考慮すると、

$$\begin{aligned}O&=\nabla_\beta T_0^\beta\\&=\partial_0T_0^1+\partial_1T_0^2+\partial_2T_0^2+\Gamma^1_{10}T_0^0-\Gamma^1_{10}T_1^1+\Gamma^2_{20}T_0^0-\Gamma^2_{20}T_2^2,\end{aligned} \tag{4-19}$$

となる。これより

$$\left(\partial_0 - \frac{2}{a}\right)T_0^0 + \left(\partial_1 - \frac{s_1}{c_1}\right)T_0^1 + \partial_2 T_0^2 + \frac{1}{a}(T_1^1 + T_2^2) = 0, \tag{4-20}$$

をうる。ここで、T_0^0 以外を無視すれば

$$\partial_0 T_0^0 = \frac{2}{a}T_0^0 \tag{4-21}$$

となる。

5. Hierarchy problem

これまで、電磁領域のみに関わってきたが、他の電弱および強相互作用の領域にふみこんで、我々の model で何がいえそうか、そのことを探そう。

素粒子物理学における hierarchy とは

①大統一 energy と弱い energy の scale の喰い違い

②基本粒子の質量の階層

をいう。

①について、まず、我々の model では、z_0 を時刻としてきたが、そうであれば z_0 は $dz_0 > 0$ を満たさなければならない。このことは、metric 中の factor $e^{\frac{2z_0}{a}}$ の値は一方的に増大することを意味する。これは明らかにおかしく、正さなければならない重大な欠陥である。そこで、我々は metric を以下のように修正しよう。z_0 を extra な座標とし、z_1 を時刻、z_2、z_3 および z_4 を空間の座標とすると、時空座標は同等でなければならないから、我々の model の metric を

$$\begin{aligned} ds^2 = dz_0^2 + a^2 e^{-\frac{2z_0}{a}}(&- dz_1^2 + ch^2(1)\,dz_2^2 \\ &+ ch^2(1)\,c_2^2\,dz_3^2 + ch^2(1)\,c_2^2 c_3^2\,dz_4^2), \end{aligned} \tag{5-1}$$

と拡張する。ここで、extra な変数 z_0 は①と②の hierarchy を説明するためのものでなければなるまい。Eq.(5-1) の metric は、Rachball が weak scale と Plank scale の間の大きな喰い違いを正すために提唱した metric

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + e^{-2kr\phi}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{5-2}$$

と同形である。我々の metric の括弧の中はユークリッド的であるので、Eq.(5-2) の $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ と同じと考えてよい。但し、本質的な違いは、Rachball の空間は Kalza-Klein 形すなわち、extra な空間と時空の空間との直積の空間であるが、我々の空間は extra な座標 z_0 と時空座標と

は融合した空間であるという点である。

②の基本粒子の階層性とは、一対の lepton と一対の quark が量子数は同じだが、質量のみが異なった状態がくり返されることをいう：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \\ d \\ u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \\ s \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \\ b \\ t \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

このことに関して、我々の energy-momentum tensor は $\lambda = p\left(p + \frac{2i}{a}\right)$ が実数、すなわち、a が虚数ならば、Eq.(4-21)において、a を実数として、ia とおきかえれば

$$\frac{\partial T_0^0}{\partial z_0} = -\frac{2i}{a} T_0^0, \tag{5-3}$$

すなわち

$$T_0^0 \ \alpha\ e^{-\frac{2i}{a} z_0} \tag{5-4}$$

となり、周期性を示す。しかし、このことが、即、基本粒子の階層性の起源の説明にはならないが、解明の糸口となる可能性はあろう。これからの研究課題である。

Appendix A

$(\Lambda_0 + \lambda)\phi_\lambda(0) = 0$ の解

$$\left(\partial_0^2 + \frac{2}{a}\partial_0 + \lambda\right)\phi_\lambda(0) = 0 \tag{A-1}$$

$\phi_\lambda(0) = Ae^{-ipz_0}$ を代入

$$P^2 + \frac{2}{a} ip - \lambda = 0 \quad \therefore \quad \lambda = p\left(p + \frac{2i}{a}\right) \tag{A-2}$$

$$P = -\frac{i}{a} \pm \sqrt{D_\lambda}$$

ここで　$D_\lambda \equiv \lambda - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \left(p + \frac{i}{a}\right)^2$

$$\therefore \quad \sqrt{D_\lambda} = \pm\left(p + \frac{i}{a}\right)$$

$$p_+ = -\frac{i}{a} + \sqrt{D_\lambda} = p$$

$$P_- = -\frac{i}{a} - \sqrt{D_\lambda} = p$$

Appendix B

直交性

$$\phi_\lambda(0) = Ae^{-\frac{\theta}{a}} . e^{i\sqrt{p_\lambda}\,\theta}$$

$$\int \phi^*_{\lambda'}(0)\,\phi_\lambda(0)\sqrt{g_0}\,d\theta$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\sqrt{D_\lambda} - \sqrt{D_{\lambda'}})\,\theta}\,d\theta$$

$$= |A|^2 \lim_{g \to \infty} \int_{-g}^{g} e^{i(\sqrt{D_\lambda} - \sqrt{D_{\lambda'}})\,\theta}$$

$$= |A|^2 \lim_{g \to \infty} \frac{e^{i(\sqrt{D_\lambda} - \sqrt{D_{\lambda'}})}\,|_{-g}^{g}}{i\left(\sqrt{D_\lambda} - \sqrt{D_{\lambda'}}\right)}$$

$$= 2\pi |A|^2 \lim_{g \to \infty} \frac{\sin\left(\sqrt{D_\lambda} - \sqrt{D_{\lambda'}}\right) g}{\pi\left(\sqrt{D_\lambda} - \sqrt{D_{\lambda'}}\right)}$$

$$= 2\pi |A|^2 \delta(D_\lambda - D_{\lambda'})$$

$$= 2\pi |A|^2 \delta(p - p')$$

$$\therefore \quad \int \phi^*_{\lambda'}(0)\,\phi_\lambda(0)\sqrt{g_0}\,d\theta = \delta_{\lambda'\lambda} \quad \text{また、} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{B-1}$$

Apeendix C

$$\sum_\lambda \phi_\lambda(0)\,\phi^*_\lambda(\bar{0})\sqrt{g(\bar{0})}$$

$$= \sum_\lambda |A|^2 e^{i\sqrt{D_\lambda}\,(\theta - \bar{\theta})}$$

$$= |A|^2 \int dp\, |A|^2 e^{i\sqrt{D_\lambda}\,(\theta - \bar{\theta})}$$

$$= |A|^2 \int \cdot \frac{dp}{d\sqrt{D_\lambda}} \cdot d\sqrt{D_\lambda}\, e^{i\sqrt{D_\lambda}(\theta - \bar{\theta})}$$

$$\frac{d\sqrt{D_\lambda}}{dp} = \frac{d}{dp}\left(p - \frac{i}{a}\right) = 1$$

$$= |A|^2 \int dX e^{ix(\theta - \bar{\theta})}, \quad X \equiv \sqrt{D_\lambda}$$

$$= |A|^2 \lim_{g-\infty} \frac{e^{ix(\theta - \bar{\theta})}}{i(\theta - \bar{\theta})}$$

$$= 2\pi |A|^2 \lim_{g-\infty} \frac{\sin g(\theta - \bar{\theta})}{\pi(\theta - \bar{\theta})}$$

$$= 2\pi |A|^2 \delta(\theta - \bar{\theta})$$

$$\therefore \quad \sum_\lambda \phi_\lambda(0)\, \phi_\lambda(\bar{0}) = \delta(\theta - \bar{\theta})$$